SESIÓN 5

LÍMITES DE FUNCIONES ESPECIALES Y LA DERIVADA.

I. CONTENIDOS:

1. Límites en el infinito
2. Formas indeterminadas de límites del tipo ($\frac{0}{0}$)
3. Dos límites especiales
4. El límite de $\frac{senx}{x} = 1$ cuando x→0
5. El número e
6. Derivación
7. Ejercicios resueltos
8. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Conocerá la existencia de otro tipo de límites.
- Comprenderá el concepto de derivada

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cómo se conceptualiza una cantidad infinita?
- ¿Por qué es tan importante el número *"e"* en matemáticas?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Límites en el infinito

Al calcular límites infinitos, hacemos tender a "x" a un número y el resultado es que los valores de la función "*y*" o *f(x)* tome valores positivos o negativos muy grandes. Geométricamente esto se puede ilustrar mediante la recta asíntota a una hipérbola, ya que puede darse el caso de que al asignarle un valor a "x" la recta asíntota se fugue el infinito.

Para evaluar un límite en el infinito de una función racional, se dividen el numerador y el denominador entre la mayor potencia de "x" que se encuentre en el denominador, suponemos que $x \neq 0$

2.1. Formas indeterminadas de límites del tipo ($\frac{0}{0}$)

Al calcular el límite de un cociente se pueden dar las siguientes situaciones

a). Si el numerador y el denominador tienen límite distinto de cero, el límite del cociente es igual al cociente de lo límites.

b). Si el límite del numerador es cero y el del denominador es diferente de cero el límite del cociente es igual a cero

c). Si el límite del numerador es diferente de cero y el del denominador es cero, el cociente no tiene límite y se entiende que tiende a más o menos infinito ($\pm\infty$).

d). Si los límites del numerador y del denominador son cero, entonces el límite se indetermina, la indeterminación se puede eliminar haciendo uso de operaciones algebraicas sencillas como una factorización.

3.1. Dos límites especiales

El límite de $\frac{senx}{x}$ cuando x→0 es igual a 1, es decir, $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

Uno de los límites más importantes es aquel que se define por la función

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828\ldots\ldots\ldots$$

A este límite se le conoce como el numero "*e*", otra forma equivalente de escribir este límite es: $(1+1/x)^x$ cuando $x \to \infty$

Este límite se representa por la letra *e*, dicha letra fue elegida en honor al físico y matemático suizo Leonhard Euler (1707- 1783). Este es un número irracional infinito, puede expresarse con tantos decimales como queramos. Existen varios métodos para la obtención de este número que además sirve como base de los logaritmos naturales, este número ha demostrado una gran utilidad en prácticamente todas las ramas de las matemáticas y las ciencias aplicadas. Ninguna otra constante matemática, ni siquiera π, esta tan relacionada a las actividades humanas. Esa constante tiene enormes aplicaciones en ingeniería, economía, finanzas, estadística, probabilidad, biología, química, etc. esto nos da una idea de la trascendencia de su descubrimiento, se podría decir que gracias a este número las matemáticas han alcanzado un gran avance.

La demostración rigurosa que estos límites existen queda fuera de los propósitos de este curso, por lo que lo aceptaremos como una definición

4.1. Derivación

En esta parte de nuestro estudio investigaremos acerca de la forma de cómo varía una función al hacer variar su variable independiente. ***El problema fundamental del Cálculo diferencial es el de definir con toda precisión una cuantificación de esta variación.*** Newton, al investigar acerca de cantidades que cambiaban de una manera continua lo llevó a descubrir los principios fundamentales del Cálculo, siendo en la actualidad una poderosa herramienta de las matemáticas y las ciencias aplicadas.

Conceptos básicos

Incrementos: Entendemos por *incremento* el paso de un valor numérico a otro de una variable, este incremento se obtiene restando al valor final el valor inicial de dicha variable, el incremento de la variable independiente x se simboliza Δx (léase delta x), esta notación **no debe ser entendida como Δ veces x**. El incremento que sufre la variable puede ser positivo o negativo, dependiendo si esta aumenta o disminuye al cambiar su valor, de acuerdo a este borden de ideas, podemos simbolizar:

Δy cuyo significado es incremento de y

$\Delta\varphi$ cuyo significado es incremento de φ

$\Delta f(x)$ cuyo significado es incremento de $f(x)$

Generalizando, cualquier incremento (si aumenta) o decremento (si disminuye) siempre será la diferencia entre el valor final y el valor inicial de la variable

A modo de ejemplo consideremos la función

$y = x^2$

Tomemos un valor inicial $x = 8$, entonces y tomaría como valor inicial $y = 64$

Ahora supongamos que incrementamos el valor de x a 10 entonces $\Delta x = 2$ (resta de $10 - 8 = 2$)

Entonces y aumenta a $y = 10^2$, es decir $y = 100$, por lo que $\Delta y = 36$ (resta de $100- 64 = 36$)

Ahora supongamos que x decrece a $x = 6$, entonces ahora $\Delta x = -2$

Por lo que $y = 36$ entonces $\Delta y = -28$

En este ejemplo podemos ver qué y aumenta cuando x aumenta y el valor de y disminuye cuando x disminuye, razón por la cual Δx y Δy tienen signos iguales. En el caso que y disminuya cuando x aumenta, o viceversa, entonces Δx y Δy tendrán signos contrarios.

Es importante señalar que los valores iníciales tanto de x como de y son fijos desde el principio de nuestro análisis, solo nos interesa averiguar "la razón de los crementos", es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Esta es la razón por la cual cuando damos el incremento a la variable independiente automáticamente se le asigna un incremento a la variable dependiente, entonces se le tiene que restar los valores iníciales a la función, de tal manera que solo trabajemos con los incrementos. Para poder entender esto veamos con toda nuestra atención el siguiente ejemplo.

Consideremos la función $y = x^2$, de acuerdo a lo expuesto, suponemos un valor inicial fijo para x dándole después un incremento arbitrario Δx, por lo que y tomará su incremento correspondiente Δy, tenemos entonces:

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

$y + \Delta y = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$ Desarrollando el binomio

$-y \quad = -x^2$ Restando los valores iníciales de la función

$\Delta y = \quad 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$

Obteniendo de esta manera el incremento de la variable dependiente en función de x y Δx

Para averiguar "la razón del incremento" se tienen que dividir ambos miembros de la ecuación anterior entre Δx, de esto obtenemos:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 2X + \Delta X$$

Supongamos un valor inicial para x = 5, tendremos entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = 10$$

Ya que $\Delta X \to 0$ en el segundo miembro de la igualdad.

Es decir, a medida que **el incremento de x (Δx) tiende a cero (no x)**, podemos hacer que el valor de la razón $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ Pueda ser tan próximo a 10 tanto como queramos con solo tomar a Δx lo suficientemente pequeño para que esto se dé.

A la razón de los incrementos, $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$, cuando hacemos tender a $\Delta X \to 0$ en el segundo miembro de la igualdad se define como **la derivada de "y" o de f(x) con respecto a "x".** A la operación de hallar la derivada de una función se le llama ***derivación.***
Se acostumbra utilizar la siguiente notación para indicar la operación de derivación de una función:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{dy}{dx}$$

Otras notaciones equivalentes usadas para indicar la operación de derivación son las siguientes:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) = f'(x)$$

Para nuestros propósitos nosotros emplearemos la notación de Leibnitz, $\frac{dy}{dx}$, **este símbolo no debe ser considerado como una fracción, sino como el valor límite de una fracción**, en cursos más avanzados de cálculo se puede demostrar que este símbolo sí tiene propiedades de una fracción, pero por el momento ha de considerarse como un conjunto que nos indica ejecutar una operación de derivación de la función considerada.

5.1. Ejercicios resueltos

1. Calcular el límite de la función y = $\frac{x^2-x-12}{x-4}$ cuando x→ 4

Sustituyendo directamente tenemos: $\frac{\lim_{x\to 4} 2-(4)-12}{4-4} = \frac{0}{0}$, se obtiene una forma indeterminada

Factorizando el numerador tenemos: $\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)(x-4)}{(x-4)} = \lim_{x\to 4}(x+3) = 4+3 = 7$ con lo que la indeterminación desaparece.

2. Calcular el límite de la función: $Y = \frac{x^2+X-6}{x^2-4}$ cuando x→ 2 ; $\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}$

3. Calcular el límite de la función: $y = \frac{y^3-27}{y^2-9} = \lim_{y\to 3}\frac{(y-3)(y^2+3y+9)}{(y+3)(y-3)} = \frac{y^2+3y+9}{y+3} = \frac{9+9+9}{3+3} = \frac{27}{6}$, observese que si se hubiese sustituido directamente obtendríamos una indeterminación, la cual queda elinada al factorizar el numerador y el denominador.

3. Calcular el límite de la función: $y = \frac{4x^3-5x^2+6}{7x-3x^2+9x^2}$, cuando x→ ∞, dividiendo el numerador y el denominador entre x^3, que es la máxima potencia de la variable en la función tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3-5x^2+6}{x^3}}{\frac{7x-3x^2+9x^3}{x^3}} = \frac{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^3}}{\frac{7}{x^2}-\frac{3}{x}+9} = \frac{4-\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^3}}{\frac{7}{\infty^2}-\frac{3}{\infty}+9} = \frac{4-0+0}{9} = \frac{4}{9}$$

4. Calcular el límite de la función: $y = \frac{2-5x^2}{4x+8x^2}$; cuando x→ ∞ , aplicando la misma técnica de caso anterior tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2-5x^2}{x^2}}{\frac{4x+8x^2}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x^2}-5}{\frac{4}{x}+8} = \frac{0-5}{0+8} = \frac{5}{8}$$ que es el límite buscado

5. Calcular el límite de la función: $y = \frac{3t+2xt^2+x^2t^3}{4-3xt-2x^3t^3}$; cuando x→ ∞ , aplicando la misma técnica del caso anterior tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{3t+2xt^2+x^2t^3}{x^2t^3}}{\frac{4-3xt-2x^3t^3}{x^2t^3}} = \frac{\frac{3}{x^2t^2}+\frac{2}{xt}+1}{\frac{4}{x^2t^3}-\frac{3}{xt^2}-2x} = \frac{\frac{3}{x^2\infty^2}+\frac{2}{x(\infty)}+1}{\frac{4}{x^2(\infty)^3}-\frac{3}{x(\infty)^2}-2x} = \frac{0+0+1}{0+0+2x} = -\frac{1}{2x}$$: que es el límite busacdo.

6.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos

1. Aplicar el artificio matemático correspondiente para resolver los siguientes límites que presentan una forma indeterminada.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{8x^2-2x}{2x}$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

c) $\lim_{X\to 0}\frac{5X}{X}$

d) $\lim_{x\to -5}\frac{x+5}{x^2-25}$

$e)$ $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x-21}{x-3}$

f) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x+21}{x-3}$